Examen de Matemáticas de Acceso a FP Superior 2024 (Comunidad de Madrid)

Soluciones

Cuestión 1

En una tienda venden 3 tipos de bombillas: incandescentes (precio 2 €), fluorescentes (precio 4 €) y leds (precio 1.50 €). Una semana venden en total 90 bombillas, ingresando 190 € y vendiendo el doble de bombillas leds que de las incandescentes y fluorescentes juntas.
a) Escriba un sistema de ecuaciones con la situación planteada.
b) Obtenga el número de bombillas vendido de cada tipo.

a) Planteamiento del sistema de ecuaciones:

Se definen las variables:

x = incandescentes, y = fluorescentes, z = leds.

El sistema es:

$$\begin{cases} x + y + z = 90 \\ 2x + 4y + 1{,}5z = 190 \\ z = 2(x + y) \end{cases}$$

b) Resolución por reducción gaussiana:

Se escribe en forma de matriz ampliada, escribiendo en cada columna los valores de la misma variable:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 2 & 4 & 1{,}5 & 190 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Se opera la segunda fila usando la primera como pivote: $R_2 \Rightarrow R_2 - 2R_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & 2 & -0{,}5 & 10 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Continuando con la tercera fila: $R_3 \Rightarrow R_3 + 2R_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & 2 & -0{,}5 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 180 \end{array}\right]$$

Por ultimo, basta con resolver las ecuaciones de manera escalonada:

Última fila: $3z = 180 \Rightarrow z = 60$.

Segunda fila: $2y - 0{,}5 \cdot 60 = 10 \Rightarrow y = 20$.
Primera fila: $x + 20 + 60 = 90 \Rightarrow x = 10$.

$$\boxed{x = 10,\ y = 20,\ z = 60}$$

Cuestión 2

En una heladería el beneficio, en euros, se expresa con la función

$$B(x) = -x^2 + 80x - 1200,$$

siendo x el número de helados vendidos.

a) ¿Cuál es el beneficio si venden 30 helados?
b) ¿Cuántos helados tienen que vender para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?
c) Halla

$$\int_{30}^{60} B(x)\, dx$$

a) Cálculo de B(30):

Se calcula el valor de la función para x = 30:

$$B(30) = -30^2 + 80 \cdot 30 - 1200 = 300\ euros$$

b) Beneficio máximo:

Se calculan y y clasifican los puntos críticos a través del criterio de la segunda derivada:

$$B'(x) = -2x + 80, \qquad B'(x) = 0 \Rightarrow x = 40$$

$$B''(x) = -2 < 0 \ \Rightarrow \ \text{máximo}$$

$$B(40) = -40^2 + 80 \cdot 40 - 1200 = 400\ euros$$

$$\boxed{\text{Máximo de 400 euros vendiendo 40 helados}}$$

c) Beneficio acumulado entre 30 y 60:

Dada la integral inmediata:

$$\int_{30}^{60} (-x^2 + 80x - 1200)\, dx = \Big[-\tfrac{x^3}{3} + 40x^2 - 1200x \Big]_{30}^{60}$$

Sustituyendo límites:

$$\Big(-\tfrac{60^3}{3} + 40 \cdot 60^2 - 1200 \cdot 60 \Big) - \Big(-\tfrac{30^3}{3} + 40 \cdot 30^2 - 1200 \cdot 30 \Big) = 9000$$

Cuestión 3

Dados los vectores

$$\vec{u} = \left(2, \tfrac{1}{5}, -1\right) \qquad \text{y} \qquad \vec{v} = (0, 3, -5)$$

a) Calcula el área del paralelogramo que tiene como dos de sus lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Obtén el perímetro de dicho paralelogramo.

c) Escribe la ecuación del plano que pasa por el punto $P(-3, 2, 6)$ y contiene al paralelogramo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\vec{u} = \left(2, \tfrac{1}{5}, -1\right), \qquad \vec{v} = (0, 3, -5)$$

a) Área del paralelogramo

Se calcula el producto vectoral entre ambos vectores:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & \frac{1}{5} & -1 \\ 0 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\tfrac{1}{5} \cdot (-5) - (-1) \cdot 3\right) - \vec{j}\left(2 \cdot (-5) - (-1) \cdot 0\right) + \vec{k}\left(2 \cdot 3 - \tfrac{1}{5} \cdot 0\right)$$

$$= \vec{i}(-1 + 3) - \vec{j}(-10) + \vec{k}(6) = (2,\ 10,\ 6)$$

A continuación se calcula el módulo de dicho producto:

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 10^2 + 6^2} = 2\sqrt{35} \approx 11{,}832$$

$$\boxed{\text{Área} \approx 11{,}83}$$

—

b) Perímetro del paralelogramo

Se calcula del módulo de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + \left(\tfrac{1}{5}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 0{,}04 + 1} \approx 2{,}245$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{0 + 9 + 25} = \sqrt{34} \approx 5{,}831$$

Entonces, para calcular el perímetro basta con multiplicar por dos la suma de ambos módulos:

$$P = 2(\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|) = 2(2{,}245 + 5{,}831) \approx 16{,}152$$

$$\boxed{\text{Perímetro} \approx 16{,}15}$$

—

c) Ecuación del plano

El plano que pasa por el punto $P(-3,2,6)$ y contiene a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se obtiene con el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-2 & z-6 \\ 2 & \frac{1}{5} & -1 \\ 0 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

Se desarrolla el cálculo (en este caso se ha realizado por adjuntos):

$$(x+3)\begin{vmatrix} \frac{1}{5} & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} + (z-6)\begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{5} \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+3)\left(\tfrac{1}{5}\cdot(-5)-(-1)\cdot 3\right) - (y-2)\left(2\cdot(-5)-(-1)\cdot 0\right) + (z-6)\left(2\cdot 3 - \tfrac{1}{5}\cdot 0\right) = 0$$

$$(x+3)(-1+3) - (y-2)(-10) + (z-6)(6) = 0$$

$$2(x+3) + 10(y-2) + 6(z-6) = 0$$

Finalmentes, se simplifica la expresión dividiendo entre dos todos los términos:

$$\boxed{x+5y+3z=25}$$

—

Cuestión 4

Alejandro va al trabajo el 10 % de las veces en coche, el 30 % en autobús y el resto en metro. Cuando va en metro llega tarde el 10 % de las veces, si va en autobús llega tarde el 25 % de las veces y si va en coche el 30 %.

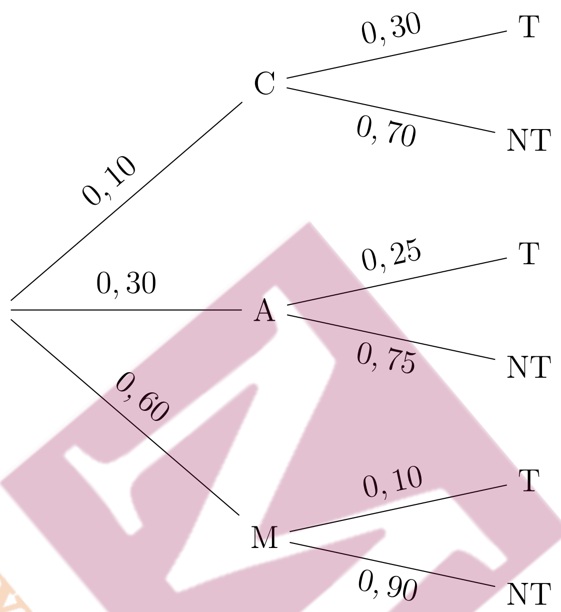
a) ¿Cuál es la probabilidad de que un día vaya en metro y llegue tarde?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que llegue tarde al trabajo, sea cual sea el medio de transporte utilizado?

c) Si un día llega tarde, ¿cuál es la probabilidad de que haya viajado en autobús?

a) Construcción del diagrama de árbol:

Se plantea el diagrama de árbol, cuyos datos servirán para todos los apartados del ejercicio:



Por tanto, para calcular la probabilidad de la intersicción de ir en metro y llegar tarde basta con multiplicar las probabilidades de la ramificación que incluye ambas condiciones:

$$P(M \cap T) = 0{,}60 \cdot 0{,}10 = 0{,}06$$

b) Cálculo de probabilidad total

Aplicando el Teorema de la probabilidad total:

$$P(T) = 0{,}60 \cdot 0{,}10 + 0{,}30 \cdot 0{,}25 + 0{,}10 \cdot 0{,}30 = 0{,}165$$

c) Cálculo de probabilidad condicionada

Empleando la propabilidad total de llegar tarde del apartado anterior, se aplica el Teorema de Bayes:

$$P(A \mid T) = \frac{P(A \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}30 \cdot 0{,}25}{0{,}165} = \frac{0{,}075}{0{,}165} = \frac{5}{11} \approx 0{,}4545$$